

## 9.1

a)  $6x - 18 > 0$      $| +18$     Siirretään termi.

$6x > 18$      $| : 6$  ( $> 0$ )    Kun jaetaan positiivisella luvulla,  
epäyhtälömerkin suunta säilyy.

$$x > 3$$

Epäyhtälön toteuttavat kaikki luvut, jotka ovat suurempia kuin 3.

b)  $3x + 6 \leq 22 - x$      $| +x$     Siirretään termit.

$$4x + 6 \leq 22 \quad | -6$$

$4x \leq 16$      $| : 4$  ( $> 0$ )    Kun jaetaan positiivisella luvulla,  
epäyhtälömerkin suunta säilyy.

$$x \leq 4$$

Epäyhtälön toteuttavat kaikki luvut, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin 4.

### Vastaus

a)  $x > 3$

b)  $x \leq 4$

## 9.2

Ratkaistaan annettu epäyhtälö CAS-laskimella.

$$\begin{aligned}4 - 7(3x - 8) &< \frac{x - 6}{2} \\x &> \frac{126}{43} \\x &> 2,930\dots\end{aligned}$$

- a)** Koska  $2 < 2,930\dots$ , niin luku 2 ei toteuta epäyhtälöä.
- b)** Koska  $3 > 2,930\dots$ , niin luku 3 toteuttaa epäyhtälön.
- c)** Koska  $-4 < 2,930\dots$ , niin luku -4 ei toteuta epäyhtälöä.
- d)** Koska  $694 > 2,930\dots$ , niin luku 694 toteuttaa epäyhtälön.

**Vastaus**

b ja d

## 9.3

Ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat.

$$x^2 - 9 = 0 \quad | +9$$

Ratkaistaan ensin potenssin  $x^2$  arvo.

$$x^2 = 9$$

Yhtälön ratkaisut ovat luvun 9 neliöjuuri ja sen vastaluku.

$$x = \sqrt{9} = 3 \text{ tai } x = -\sqrt{9} = -3$$

Funktion arvojen merkki voidaan päätellä kahdella tavalla.

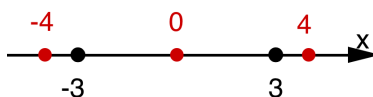
**Tapa 1.** Päätellään funktion merkit testaamalla.

Funktion  $f$  merkki voi vaihtua vain nollakohdissa  $-3$  ja  $3$ .

Nollakohdat jakavat

lukusuoran kolmeen osaan.

Lasketaan kultakin osaväliltä yksi funktion  $f$  arvo.



$$f(-4) = (-4)^2 - 9 = 7 > 0 \quad +$$

Merkitään merkkikaavioon + luvun  $-3$  vasemmalle puolelle.

$$f(0) = 0^2 - 9 = -9 < 0 \quad -$$

Merkitään merkkikaavioon - lukujen  $-3$  ja  $3$  väliin.

$$f(4) = 4^2 - 9 = 7 > 0 \quad +$$

Merkitään merkkikaavioon + luvun  $3$  oikealle puolelle.

Laaditaan funktion  $f$  merkkikaavio.

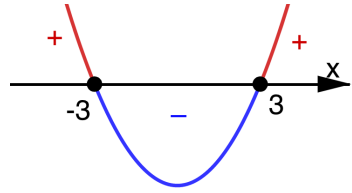
$$f(x) = x^2 - 9 \quad \begin{array}{c|c|c} -3 & 3 & \\ \hline + & - & + \\ \hline \end{array}$$

Funktion  $f$  arvo on positiivinen, kun  $x < -3$  tai  $x > 3$ .

Funktion  $f$  arvo on negatiivinen, kun  $-3 < x < 3$ .

**Tapa 2:** Päätellään funktion merkit kuvaajan avulla.

Hahmotellaan funktion  $f(x) = x^2 - 9$  kuvaaja. Huomaa, että voit hahmotella kuvaajan suttupaperille.



Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat  $-3$  ja  $3$ .

Funktion kuvaaja kulkee  $x$ -akselin yläpuolella nollakohdan  $-3$  vasemmalla puolella ja nollakohdan  $3$  oikealla puolella. Funktion arvo on positiivinen, kun  $x < -3$  tai  $x > 3$ .

Funktion kuvaaja kulkee  $x$ -akselin alapuolella nollakohtien  $-3$  ja  $3$  välissä. Funktion arvo on negatiivinen, kun  $-3 < x < 3$ .

### Vastaus

nollakohdat  $x = -3$  ja  $x = 3$ ;

funktion arvo on positiivinen, kun  $x < -3$  tai  $x > 3$ ;

funktion arvo on negatiivinen, kun  $-3 < x < 3$

## 9.4

Ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat.

$$2x^2 + 6x = 0$$

$$x(2x + 6) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } 2x + 6 = 0 \quad | -6$$

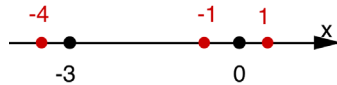
$$2x = -6 \quad | :2$$

$$x = -3$$

Funktion arvojen merkki voidaan päätellä kahdella tavalla.

**Tapa 1.** Päätellään funktion merkit testaamalla.

Funktion  $f$  merkki voi vaihtua vain nollakohdissa  $-3$  ja  $0$ . Nollakohdat jakavat lukusuoran kolmeen osaan. Lasketaan kultakin osaväliltä yksi funktion  $f$  arvo.



$$f(-4) = 2 \cdot (-4)^2 + 6 \cdot (-4) = 8 > 0 \quad +$$

Merkitään merkkikaavioc lukun  $-3$  vasemmalle p

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) = -4 < 0 \quad -$$

Merkitään merkkikaavioc lukujen  $-3$  ja  $0$  väliin.

$$f(1) = 2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 8 > 0 \quad +$$

Merkitään merkkikaavioon  $+$  lukun  $0$  oikealle puolelle.

Laaditaan funktion  $f$  merkkikaavio.

$$f(x) = 2x^2 + 6x \quad \begin{array}{c|c|c} -3 & 0 & \\ \hline + & - & + \\ \hline \end{array}$$

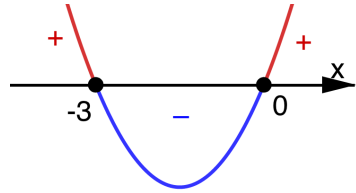
Funktion  $f$  arvo on negatiivinen, kun  $-3 < x < 0$ .

**Tapa 2:** Pääteellään funktion merkit kuvaajan avulla.

Hahmotellaan funktion

$f(x) = 2x^2 + 6x$  kuvaaja. Huomaa,

että voit hahmotella kuvaajan  
suttupaperille.



Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli,  
jonka nollakohdat ovat  $-3$  ja  $0$ .

Funktion kuvaaja kulkee  $x$ -akselin alapuolella nollakohtien  $-3$  ja  $0$   
välissä. Funktion arvo on negatiivinen, kun  $-3 < x < 0$ .

**Vastaus**

$$-3 < x < 0$$

## 9.5

Tulee selvittää, millä muuttujan  $x$  arvoilla funktion  $f(x) = x^2 - 3x - 4$  arvo on positiivinen. Tutkitaan funktion  $f$  merkkiä.

Polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissa. Ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat.

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 1, \quad b = -3 \quad \text{ja} \quad c = -4$$

$$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm 5}{2}$$

Lasketaan ratkaisujen arvot yksitellen.

$$x = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Funktion arvojen merkki voidaan päätellä kahdella tavalla.

**Tapa 1.** Päätellään funktion merkit testaamalla.

Funktion  $f$  merkki voi vaihtua vain nollakohdissa  $-1$  ja  $4$ . Nollakohdat jakavat lukusuoran kolmeen osaan. Lasketaan kultakin osaväliltä yksi funktion  $f$  arvo.

$$f(-2) = (-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 4 = 6 > 0 \quad +$$

Merkitään merkkikaavioc lukun  $-1$  vasemmalle p

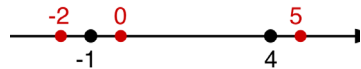
$$f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 - 4 = -4 < 0 \quad -$$

Merkitään merkkikaavioon  $-$  lukujen  $-1$  ja  $4$  väliin.

$$f(5) = 5^2 - 3 \cdot 5 - 4 = 6 > 0 \quad +$$

Merkitään merkkikaavioon  $+$  lukun  $4$  oikealle puolelle.

Laaditaan funktion  $f$  merkkikaavio.



$$f(x) = x^2 - 3x - 4 \quad \begin{array}{c|c|c} -1 & & 4 \\ \hline + & - & + \\ \hline \end{array}$$

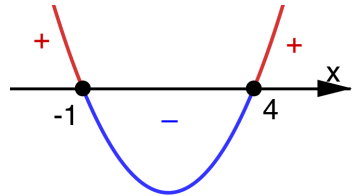
Funktion  $f(x) = x^2 - 3x - 4$  arvo on positiivinen, kun  $x < -1$  tai  $x > 4$ .

Epäyhtälö  $x^2 - 3x - 4 > 0$  toteutuu, kun  $x < -1$  tai  $x > 4$ .

**Tapa 2:** Päättellään funktion merkit kuvaajan avulla.

Hahmotellaan funktion

$f(x) = x^2 - 3x - 4$  kuvaaja. Huomaa, että voit hahmotella kuvaajan suttupaperille.



Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat  $-1$  ja  $4$ .

Funktion arvo on positiivinen nollakohdan  $-1$  vasemmalla puolella ja nollakohdan  $4$  oikealla puolella.

Epäyhtälö  $x^2 - 3x - 4 > 0$  toteutuu, kun  $x < -1$  tai  $x > 4$ .

**Vastaus**

$$x < -1 \text{ tai } x > 4$$



## 9.6

Tulee selvittää, millä muuttujan  $x$  arvoilla funktion  $f(x) = 2x^2 + x - 3$  arvo on negatiivinen tai nolla. Tutkitaan funktion  $f$  merkkiä.

Polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissa. Ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat.

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 2, \quad b = 1 \quad \text{ja} \quad c = -3$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4}$$

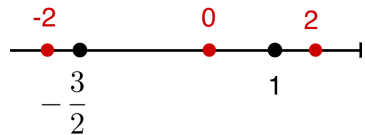
$$= \frac{-1 \pm 5}{4}$$

Lasketaan ratkaisujen arvot yksitellen.

$$x = \frac{-1 + 5}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1 - 5}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Päätellään funktion merkit testaamalla.

Funktion  $f$  merkki voi vaihtua vain nollakohdissa  $-\frac{3}{2}$  ja  $1$ . Nollakohdat jakavat lukusuoran kolmeen osaan. Lasketaan kultakin osaväliltä yksi funktion  $f$  arvo.



$$f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 + (-2) - 3 = 3 > 0 \quad +$$

Merkitään merkkikaavioc luvun  $-\frac{3}{2}$  vasemmalle.

$$f(0) = 2 \cdot 0^2 + 0 - 3 = -3 < 0 \quad -$$

Merkitään merkkikaavioon  $-$  lukujen  $-\frac{3}{2}$  ja  $1$  väliin.

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 - 3 = 7 > 0 \quad +$$

Merkitään merkkikaavioon  $+$  luvun  $1$  oikealle puolelle.

Laaditaan funktion  $f$  merkkikaavio.

$$f(x) = 2x^2 + x - 3 \quad \begin{array}{c|c|c} -2/3 & 1 & \\ \hline + & - & + \\ \hline \end{array}$$

Funktion  $f(x) = 2x^2 + x - 3$  arvo on negatiivinen tai nolla, kun  $-\frac{2}{3} \leq x \leq 1$ . Epäyhtälö  $2x^2 + x - 3 \leq 0$  toteutuu, kun  $-\frac{2}{3} \leq x \leq 1$ .

Huomaa, että voit ratkaista epäyhtälön myöskin päättelämällä funktion merkit kuvaajan avulla.

**Vastaus**

$$-\frac{2}{3} \leq x \leq 1$$

## 9.7

a)  $6(x + 4) > \frac{24x - 1}{4}$  Ratkaistaan CAS-laskimella.

tosi

Epäyhtälö toteutuu kaikilla  $x$ :n arvoilla.

b)  $\frac{x}{3} - 2 \geq \frac{5 + 2x}{6} + 1$  Ratkaistaan CAS-laskimella.

epätosi

Epäyhtälö ei toteudu millään  $x$ :n arvolla.

### Vastaus

a) Epäyhtälö toteutuu kaikilla  $x$ :n arvoilla.

b) Epäyhtälö ei toteudu millään  $x$ :n arvolla.

## 9.8

Ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat.

$$-x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = -1, \quad b = 2 \quad \text{ja} \quad c = -3$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{-2}$$

Koska  $\sqrt{-8}$  ei ole määritelty, funktiolla  $f$  ei ole nollakohtia.

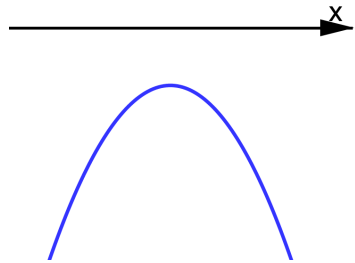
Päätellään funktion merkit kuvaajan avulla.

Hahmotellaan funktion

$$f(x) = -x^2 + 2x - 3 \quad \text{kuvaaja.}$$

Huomaa, että voit hahmotella kuvaajan  
suttupaperille.

Kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli,  
jolla ei ole nollakohtia.



Funktion arvo ei ole positiivinen millään muuttujan  $x$  arvolla.

**Huomaa, että voit ratkaista epäyhtälön myöskin pääättelemällä funktion merkit testaamalla.**

### Vastaus

ei millään muuttujan  $x$  arvolla.

## 9.9

a) Muodostetaan epäyhtälö.

$$\begin{array}{ll} f(x) < g(x) & f(x) = 5x - 3, \quad g(x) = x \\ 5x - 3 < x & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ x < \frac{3}{4} \end{array}$$

Epäyhtälön toteuttavat kaikki luvut, jotka ovat pienempiä kuin  $\frac{3}{4}$ .

b) Muodostetaan epäyhtälö.

$$\begin{array}{ll} p(x) \geq q(x) & p(x) = x^2 + 1, \quad q(x) = x + 7 \\ x^2 + 1 \geq x + 7 & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ x \leq -2 \text{ tai } x \geq 3 \end{array}$$

Epäyhtälön toteuttavat kaikki luvut, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin  $-2$ , tai suurempia tai yhtä suuria kuin  $3$ .

### Vastaus

a)  $5x - 3 < x, \quad x < \frac{3}{4}$

b)  $x^2 + 1 \geq x + 7, \quad x \leq -2 \text{ tai } x \geq 3$

## 9.10

- a) Merkitään kilometrimäärää kirjaimella  $x$ .

Vuokraamon A hinta on  $30 + 0,30x$  (euroa).

Vuokraamon B hinta on  $40 + 0,25x$  (euroa).

Tulee selvittää millä kilometrimäärällä vuokraamo B on edullisempi kuin vuokraamo A.

Muodostetaan epäyhtälö.

$$40 + 0,25x < 30 + 0,30x$$

$$x > 200 \text{ (km)}$$

Ratkaistaan CAS-

Vuokraamo B on edullisempi, kun ajetaan yli 200 km.

- b) Merkitään vuorokausien määrää kirjaimella  $y$ .

Vuokraamon A hinta on  $30y + 0,30 \cdot 5000$  (euroa).

Vuokraamon B hinta on  $40y + 0,25 \cdot 5000$  (euroa).

Tulee selvittää, missä ajassa matka on ajettava, että vuokraamo B on edullisempi kuin vuokraamo A.

Muodostetaan epäyhtälö.

$$40y + 0,25 \cdot 5000 < 30y + 0,30 \cdot 5000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$y < 25 \text{ (vuorokautta)}$$

Vuokraamo B on edullisempi, kun matka ajetaan alle 25 vuorokaudessa.

### Vastaus

a) yli 200 km

b) alle 25 vuorokaudessa

## 9.11

a)  $5x - 45 > 0$      $|+45$     Siirretään termi.

$5x > 45$      $|\div 5$  ( $> 0$ )    Kun jaetaan positiivisella luvulla,  
epäyhtälömerkin suunta säilyy.

$$x > 9$$

Epäyhtälön toteuttavat kaikki luvut, jotka ovat suurempia kuin 9.

b)

$4x - 8 \leq 32 - 6x$      $|+6x$     Siirretään termit.

$10x - 8 \leq 32$      $|+8$

$10x \leq 40$      $|\div 10$  ( $> 0$ )

Kun jaetaan positiivisella luvulla,  
epäyhtälömerkin suunta säilyy.

$$x \leq 4$$

Epäyhtälön toteuttavat kaikki luvut, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin 4.

### Vastaus

a)  $x > 9$

b)  $x \leq 4$

## 9.12

Ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat.

$$25 - x^2 = 0 \quad | -25$$

Ratkaistaan ensin potenssin  
 $x^2$  arvo.

$$-x^2 = -25 \quad | :(-1)$$

$$x^2 = 25$$

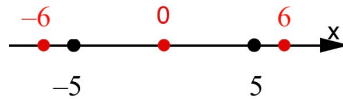
Yhtälön ratkaisut ovat luvun 25  
neliöjuuri ja sen vastaluku.

$$x = \sqrt{25} = 5 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{25} = -5$$

Funktion arvojen merkki voidaan päätellä kahdella tavalla.

**Tapa 1.** Päätellään funktion merkit testaamalla.

Funktion  $f$  merkki voi vaihtua  
vain nollakohdissa  $-5$  ja  $5$ .  
Nollakohdat jakavat  
lukusuoran kolmeen osaan.  
Lasketaan kultakin osaväliltä  
yksi funktion  $f$  arvo.



$$f(-6) = 25 - (-6)^2 = -11 < 0 \quad -$$

Merkitään merkkikaavioo  
luvun  $-5$  vasemmalle p

$$f(0) = 25 - 0^2 = 25 > 0 \quad +$$

Merkitään merkkikaavioon  $+$   
lukujen  $-5$  ja  $5$  väliin.

$$f(6) = 25 - 6^2 = -11 < 0 \quad -$$

Merkitään merkkikaavioon  $-$   
luvun  $5$  oikealle puolelle.

Laaditaan funktion  $f$  merkkikaavio.

$$f(x) = 25 - x^2 \quad \begin{array}{c|c|c} -5 & 5 \\ \hline - & + & - \\ \hline \end{array}$$

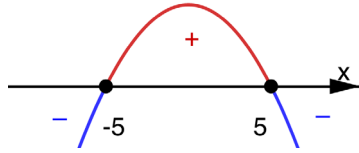
Funktion  $f$  arvo on positiivinen, kun  $-5 < x < 5$ .

Funktion  $f$  arvo on negatiivinen, kun  $x < -5$  tai  $x > 5$ .



**Tapa 2:** Päätellään funktion merkit kuvaajan avulla.

Hahmotellaan funktion  $f(x) = 25 - x^2$  kuvaaja. Huomaa, että voit hahmotella kuvaajan suttupaperille.



Kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat  $-5$  ja  $5$ .

Funktion kuvaaja kulkee  $x$ -akselin yläpuolella nollakohtien  $-5$  ja  $5$  välissä. Funktion arvo on positiivinen, kun  $-5 < x < 5$ .

Funktion kuvaaja kulkee  $x$ -akselin alapuolella nollakohdan  $-5$  vasemmalla puolella ja nollakohdan  $5$  oikealla puolella. Funktion arvo on negatiivinen, kun  $x < -5$  tai  $x > 5$ .

### Vastaus

nollakohdat  $x = -5$  ja  $x = 5$ ;

funktion arvo on positiivinen, kun  $-5 < x < 5$ ;

funktion arvo on negatiivinen, kun  $x < -5$  tai  $x > 5$

## 9.13

Ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat.

$$3x^2 - 9x = 0$$

$$x(3x - 9) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } 3x - 9 = 0 \quad | +9$$

$$3x = 9 \quad | :3$$

$$x = 3$$

Funktion arvojen merkki voidaan päätellä kahdella tavalla.

**Tapa 1.** Päätellään funktion merkit testaamalla.

Funktion  $f$  merkki voi vaihtua vain nollakohdissa 0 ja 3. Nollakohdat jakavat lukusuoran kolmeen osaan. Lasketaan kultakin osaväliltä yksi funktion  $f$  arvo.

$$f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) = 12 > 0 \quad +$$

Merkitään merkkikaavioo  
luvun 0 vasemmalle puolelle

$$f(1) = 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 = -6 < 0 \quad -$$

Merkitään merkkikaavioon  $-$   
lukujen 0 ja 3 väliin.

$$f(4) = 3 \cdot 4^2 - 9 \cdot 4 = 12 > 0 \quad +$$

Merkitään merkkikaavioon  $+$   
luvun 3 oikealle puolelle.

Laaditaan funktion  $f$  merkkikaavio.

$$f(x) = 3x^2 - 9x \quad \begin{array}{c|c|c} 0 & 3 & \\ \hline + & - & + \\ \hline \end{array}$$

Funktion  $f$  arvo on negatiivinen, kun  $0 < x < 3$ .

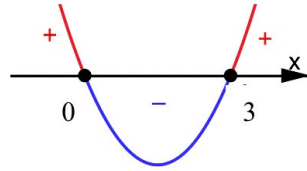


**Tapa 2:** Pääteellään funktion merkit kuvaajan avulla.

Hahmotellaan funktion

$f(x) = 3x^2 - 9x$  kuvaaja. Huomaa,

että voit hahmotella kuvaajan  
suttupaperille.



Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli,  
jonka nollakohdat ovat 0 ja 3.

Funktion kuvaaja kulkee  $x$ -akselin alapuolella nollakohtien 0 ja 3  
välissä. Funktion arvo on negatiivinen, kun  $0 < x < 3$ .

**Vastaus**

$$0 < x < 3$$

## 9.14

Tulee selvittää, millä muuttujan  $x$  arvoilla funktion  $f(x) = 4x^2 + 5x + 1$  arvo on positiivinen. Tutkitaan funktion  $f$  merkkiä.

Polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissa. Ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat.

$$4x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 4, \quad b = 5 \quad \text{ja} \quad c = 1$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{8}$$

$$= \frac{-5 \pm 3}{8}$$

Lasketaan ratkaisujen arvot yksitellen.

$$x = \frac{-5 + 3}{8} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-5 - 3}{8} = \frac{-8}{8} = -1$$

Funktion arvojen merkki voidaan päätellä kahdella tavalla.

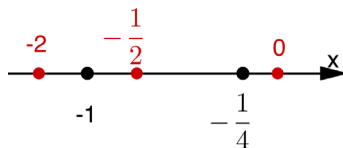
**Tapa 1.** Päätellään funktion merkit testaamalla.

Funktion  $f$  merkki voi vaihtua vain

nollakohdissa  $-1$  ja  $-\frac{1}{4}$ . Nollakohdat

jakavat lukusuoran kolmeen osaan.

Lasketaan kultakin osaväliltä yksi funktion  $f$  arvo.



$$f(-2) = 4 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 1 = 7 > 0 \quad + \quad \text{Merkitään merkkikaavioon} \\ + \text{ luvun } -1 \text{ vasemmalle} \\ \text{puolelle.}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -\frac{1}{2} < 0 \quad - \quad \text{Merkitään merkkikaavio} \\ - \text{ lukujen } -1 \text{ ja } -\frac{1}{4} \\ \text{väliin.}$$

$$f(0) = 4 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 + 1 = 1 > 0 \quad + \quad \text{Merkitään merkkikaavioon} \\ + \text{ luvun } -\frac{1}{4} \text{ oikealle} \\ \text{puolelle.}$$

Laaditaan funktion  $f$  merkkikaavio.

$$f(x) = 4x^2 + 5x + 1 \quad \begin{array}{c|c|c} -1 & -1/4 & \\ \hline + & - & + \\ \hline \end{array}$$

Funktion  $f(x) = 4x^2 + 5x + 1$  arvo on positiivinen, kun  $x < -1$  tai  $x > -\frac{1}{4}$ .

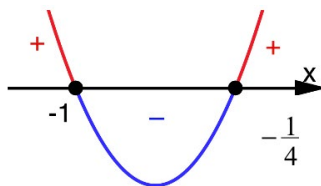
Epäyhtälö  $4x^2 + 5x + 1 > 0$  toteutuu, kun  $x < -1$  tai  $x > -\frac{1}{4}$ .

**Tapa 2:** Päättellään funktion merkit kuvaajan avulla.

Hahmotellaan funktion

$$f(x) = 4x^2 + 5x + 1 \text{ kuvaaja.}$$

Huomaa, että voit hahmotella kuvaajan suttupaperille.



Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat  $-1$  ja  $-\frac{1}{4}$ .

Funktion arvo on positiivinen nollakohdan  $-1$  vasemmalla puolella ja nollakohdan  $-\frac{1}{4}$  oikealla puolella.

Epäyhtälö  $4x^2 + 5x + 1 > 0$  toteutuu, kun  $x < -1$  tai  $x > -\frac{1}{4}$ .

**Vastaus**

$$x < -1 \text{ tai } x > -\frac{1}{4}$$

## 9.15

Muokataan epäyhtälöä.

$$x^2 + 2x \leq 15 \quad | -15$$

$$x^2 + 2x - 15 \leq 0$$

Tulee selvittää, millä muuttujan  $x$  arvoilla funktion  $f(x) = x^2 + 2x - 15$  arvo on negatiivinen tai nolla. Tutkitaan funktion  $f$  merkkiä.

Polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissa. Ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat.

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 1, \quad b = 2 \quad \text{ja} \quad c = -15$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 8}{2}$$

Lasketaan ratkaisujen arvot yksitellen.

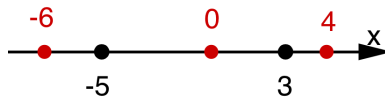
$$x = \frac{-2 + 8}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2 - 8}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Päätellään funktion merkit testaamalla.

Funktion  $f$  merkki voi vaihtua vain nollakohdissa  $-5$  ja  $3$ .

Nollakohdat jakavat lukusuoran kolmeen osaan.

Lasketaan kultakin osaväliltä yksi funktion  $f$  arvo.



$$f(-6) = (-6)^2 + 2 \cdot (-6) - 15 = 9 > 0 \quad + \quad \text{Merkitään merkkikaavioon} \\ \text{luvun } -5 \text{ vasemmalle puolelle}$$

$$f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 15 = -15 < 0 \quad - \quad \text{Merkitään merkkikaavioon } - \\ \text{lukujen } -5 \text{ ja } 3 \text{ väliin.}$$

$$f(4) = 4^2 + 2 \cdot 4 - 15 = 9 > 0 \quad + \quad \text{Merkitään merkkikaavioon } + \\ \text{luvun } 3 \text{ oikealle puolelle.}$$

Laaditaan funktion  $f$  merkkikaavio.

$$f(x) = x^2 + 2x - 15 \quad \begin{array}{c|c|c} -5 & & 3 \\ \hline + & - & + \end{array}$$

Funktion  $f(x) = x^2 + 2x - 15$  arvo on negatiivinen tai nolla, kun  $-5 \leq x \leq 3$ . Epäyhtälö  $x^2 + 2x \leq 15$  toteutuu, kun  $-5 \leq x \leq 3$ .

**Huomaa, että voit ratkaista epäyhtälön myöskin pääättelemällä funktion merkit kuvaajan avulla.**

**Vastaus**

$$-5 \leq x \leq 3$$

## 9.16

Ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat.

$$2x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 2, \quad b = -4 \quad \text{ja} \quad c = 3$$

$$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{8}$$

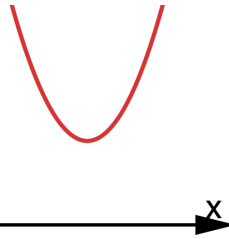
Koska  $\sqrt{-8}$  ei ole määritelty, funktiolla  $f$  ei ole nollakohtia.

Päätellään funktion merkit kuvaajan avulla.

Hahmotellaan funktion

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 3 \quad \text{kuvaaja.}$$

Huomaa, että voit hahmotella kuvaajan  
suttupaperille.



Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli,  
jolla ei ole nollakohtia.

Funktion arvo on positiivinen kaikilla muuttujan  $x$  arvoilla.

**Huomaa, että voit ratkaista epäyhtälön myöskin pääättelemällä funktion merkit testaamalla.**

### Vastaus

kaikilla muuttujan  $x$  arvoilla



## 9.17

a) Ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat.

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 1, \quad b = -1 \quad \text{ja} \quad c = -6$$

$$= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

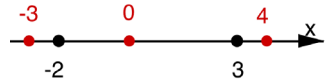
$$= \frac{1 \pm 5}{2}$$

Lasketaan ratkaisujen arvot yksitellen.

$$x = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Päätellään funktion merkit testaamalla.

Funktion  $f$  merkki voi vaihtua vain nollakohdissa  $-2$  ja  $3$ . Nollakohdat jakavat lukusuoran kolmeen osaan. Lasketaan kultakin osaväliltä yksi funktion  $f$  arvo.



$$f(-3) = (-3)^2 - (-3) - 6 = 6 > 0 \quad +$$

$$f(0) = 0^2 - 0 - 6 = -6 < 0 \quad -$$

$$f(4) = 4^2 - 4 - 6 = 6 > 0 \quad +$$

Laaditaan funktion  $f$  merkkikaavio.

	-2	3	
$f(x) = x^2 - x - 6$	+	-	+

Funktion  $f(x) = x^2 - x - 6$  arvo on positiivinen, kun  $x < -2$  tai  $x > 3$ .

**b)** Määritetään funktion  $f(x) = x^2 - x - 6$  derivaatafunktio.

$$f'(x) = 2x - 1 + 0 = 2x - 1$$

Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$2x - 1 > 0 \quad | +1$$

$$2x > 1 \quad | :2$$

$$x > \frac{1}{2}$$

Funktion  $f(x) = x^2 - x - 6$  derivaatan arvo on positiivinen, kun

$$x > \frac{1}{2}.$$

**Vastaus**

**a)**  $x < -2$  tai  $x > 3$

**b)**  $x > \frac{1}{2}$

## 9.18

Muodostetaan epäyhtälö.

$$f(x) \geq g(x)$$

$$1 - x < x - 2$$

$$x \leq \frac{3}{2}$$

$$f(x) = 1 - x, \quad g(x) = x - 2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Funktion  $f$  arvo on suurempi tai yhtä suuri kuin funktion  $g$  arvo, kun muuttuja  $x \leq \frac{2}{3}$ .

**Vastaus**

$$x \leq \frac{2}{3}$$

## 9.19

Tulee selvittää, millä muuttujan  $x$  arvoilla funktion

$f(x) = 2x^3 - 8x^2 + 8x$  arvo on negatiivinen tai nolla. Tutkitaan funktion  $f$  merkkiä.

Polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissa. Ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat.

$$2x^3 - 8x^2 + 8x = 0$$

Erotetaan yhteinen tekijä  $2x$ .

$$2x(x^2 - 4x + 4) = 0$$

Käytetään tulon nollasääntöä.

$$2x = 0 \quad | :2 \quad \text{tai} \quad x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

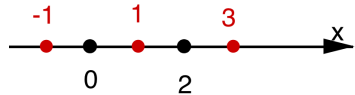
$$= \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 0}{2}$$

$$x = \frac{4}{2} = 2$$

Päätellään funktion merkit testaamalla.

Funktion  $f$  merkki voi vaihtua vain nollakohdissa 0 ja 2. Nollakohdat jakavat lukusuoran kolmeen osaan.



Lasketaan kultakin osaväliltä yksi funktion  $f$  arvo.

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 8 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) = -18 < 0 \quad -$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 8 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 = 2 > 0 \quad +$$

$$f(3) = 2 \cdot 3^3 - 8 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 = 6 > 0 \quad +$$

Laaditaan funktion  $f$  merkkikaavio.

$$f(x) = 2x^3 - 8x^2 + 8x \quad \begin{array}{c|c|c} 0 & & 2 \\ \hline - & + & + \\ \hline \end{array}$$

Funktion  $f(x) = 2x^3 - 8x^2 + 8x$  arvo on negatiivinen, kun  $x < 0$ .

Funktion  $f$  arvo on nolla, kun  $x = 0$  tai  $x = 2$ .

Epäyhtälö  $2x^3 - 8x^2 + 8x \leq 0$  toteutuu, kun  $x \leq 0$  tai  $x = 2$ .

### Vastaus

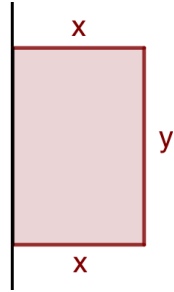
$$x \leq 0 \text{ tai } x = 2$$

## 9.20

Piirretään mallikuva. Merkitään jokea vastaan kohtisuorien sivujen pituutta kirjaimella  $x$  ja joen suuntaisen sivun pituutta kirjaimella  $y$ .

Köyttä käytetään 50 metriä. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan joen suuntaisen sivun pituus.

$$2x + y = 50 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$y = 50 - 2x$$



Muodostetaan funktio  $A(x)$ , joka ilmaisee aitauksen pinta-alan.

$$A(x) = x \cdot (50 - 2x) = 50x - 2x^2$$

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan jokea vastaan kohtisuoran sivun pituus.

$$A(x) > 300$$
$$50x - 2x^2 > 300 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$10 < x < 15$$

Jokea vastaan kohtisuoran sivun on oltava yli 10 m ja alle 15 m.

### Vastaus

yli 10 m ja alle 15 m